Universidade de São Paulo em São Carlos 17.3.2011

Mecânica Quântica Aplicada Lista 1

Exercício 1: Demonstre a conservação local da probabilidade através das definições das densidades de probabilidade, $\rho(\vec{r},t)$, e de corrente $\vec{j}(\vec{r},t)$. [1]

Exercício 2: A distribuição espacial de uma partícula seja dada por uma função gaussiana com a largura Δx. Calcula a distribuição de momento e a sua largura Δp. Só considere uma dimensão.

Exercício 3: Demonstre que os autovalores de uma observável são reais.

Exercício 4: Considere um átomo de dois níveis. O hamiltoniano é dado por,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_0 \end{pmatrix} .$$

Usando a equação de Schrödinger, calcule autovalores e autovetores.

Exercício 5: Explique a idéia da medida quântica no exemplo de uma medida da energia de excitação de um átomo de dois níveis.

Exercício 6: Demonstre que dois autovetores de um operador hermiteano associados a dois autovalores diferentes são ortogonais.

Exercício 7a: Outra maneira de formular o problema de autovalores. Seja $|\psi_k\rangle$ uma base ortonormal com os autovalores respectivos a_k. Seja $U \equiv \begin{pmatrix} |\psi_1\rangle & |\psi_2\rangle & \cdots \end{pmatrix}$ e $E = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots \\ 0 & a_2 & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$. Mostra

$$U^{-1} = U^\dagger \qquad \text{e} \qquad \hat{H}U = UE .$$

Exercício 7b: Acha os autovalores e -vetores do operador $\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercício 7c: Acha os autovalores e -vetores do operador $\hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

[1] Veja Cohen-Tannoudji, Cap.III,D-1-c

Exercício 8a: Demonstre que se dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ comutam e se $|\psi\rangle$ é um autovetor de $\hat{A}$, $\hat{B}|\psi\rangle$ também é um autovetor de $\hat{A}$ com o mesmo autovalor.

Exercício 8b: Demonstre que se dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ comutam e se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são dois autovetores de $\hat{A}$ com diferentes autovalores, o elemento de matriz $\langle\psi_1|B|\psi_2\rangle$ é igual a zero.

Exercício 8c: Demonstre que se dois operadores $\hat{A}$ e $\hat{B}$ comutam, podemos construir uma base ortonormal com autovetores comuns a $\hat{A}$ e $\hat{B}$.

Exercício 9a: Considere um sistema físico cujo espaço de estados tridimensional segue-se da base ortonormal dos estados $|u_1\rangle$, $|u_2\rangle$, $|u_3\rangle$. Nesta base de estados tomados nesta ordem, os operadores $\hat{H}$ e $\hat{B}$ são definidos da forma

$$\hat{H} = \hbar\omega_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{B} = b \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} ,$$

onde ω_0 e b são constantes reais.
Os operadores são hermiteanos?

Exercício 9b: Mostre que $\hat{H}$ e $\hat{B}$ comutam. Obtenha uma base de autovetores comum a H e B.

Exercício 9c: Do conjunto de operadores $\{\hat{H}\}$, $\{\hat{B}\}$, $\{\hat{H}, \hat{B}\}$, $\{\hat{H}^2, \hat{B}\}$ quais formam um CCOC (conjunto completo de observáveis comutandos)?

Exercício 9d: No mesmo espaço de estados considere os operadores $\hat{L}_z$ e $\hat{S}$ definidos da forma

$$\begin{aligned} \hat{L}_z|u_1\rangle &= |u_1\rangle \quad , \quad \hat{L}_z|u_2\rangle = 0 \quad , \quad \hat{L}_z|u_3\rangle = -|u_3\rangle \\ \hat{S}|u_1\rangle &= |u_3\rangle \quad , \quad \hat{S}|u_2\rangle = |u_2\rangle \quad , \quad \hat{S}|u_3\rangle = |u_1\rangle \ . \end{aligned}$$

Escreva as matrizes que representam, na base $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$, os operadores $\hat{L}_z$, $\hat{L}_z^2$, $\hat{S}$ e $\hat{S}^2$. Estes operadores são observáveis?

Exercício 9e: Obtenha a forma da matriz mais geral que representa um operador que comuta com $\hat{L}_z$. Faça o mesmo para os operadores $\hat{L}_z^2$ e $\hat{S}^2$.

Exercício 9f: $\hat{L}_z^2$ e $\hat{S}$ formam um CCOC? Obtenha uma base de autovetores comum a ambos os operadores.

Exercício 10: Desenvolva a derivação formal do principio da incerteza de Heisenberg.

Exercício 11: A partir do elemento de matriz $\langle\vec{r}|P_x|\psi\rangle$ e das propriedades das transformadas de Fourier demonstre que $\langle\vec{r}|\vec{P}|\psi\rangle = (\hbar/i)\nabla\langle\vec{r}|\psi\rangle$.[2]

[2] Veja Cohen-Tannoudji, Cap.II, E-2-a & Apêndice I

Exercício 12: Escreva a equação de Schrödinger na representação de posição.[3]

Exercício 13: Calcule a evolução temporal de um átomo com dois níveis acoplados por um campo de luz usando o hamiltoniano,

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\hbar\Omega \\ \frac{1}{2}\hbar\Omega & \hbar\Delta \end{pmatrix} ,$$

onde $\Delta = \omega - \omega_0$ é a dessintonização entre a frequência da luz e a frequência da transição e Ω a frequência de Rabi.

Exercício 14: Compare as equações do teorema de Ehrenfest com aquelas de Hamilton-Jacobi para uma partícula clássica sujeita a um potencial independente do tempo. Discuta o limite clássico, isto é, quando as equações de Hamilton-Jacobi aproximam-se daquelas de Ehrenfest.

Exercício 15: Prove que a formula de Glauber, $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+[\hat{A},\hat{B}]/2}$, é válida sempre que $[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] = [\hat{B},[\hat{A},\hat{B}]] = 0$.[4]

Exercício 16: Prove a relação $e^{i\alpha\sigma_x} = 1\cos\alpha + i\sigma_x \sin\alpha$, sendo 1 a matriz identidade e $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

[3]Veja Cohen-Tannoudji, Cap.II, Comp.D_{II},2-c

[4]Veja Cohen-Tannoudji, Cap.II, Comp.B_{II},5-d